

Predikátová logika

Na rozdíl od výrokové logiky si predikátová logika (PL) všímá struktury vět samotných. Rozlišuje v každé větě individuum, resp. individua, o němž, resp. o nichž, se něco predikuje - predikát intuitivně chápeme jako vlastnost nebo vztah. Většina z toho, co jsme formulovali ve výrokové logice zůstává v platnosti i v rámci predikátové logiky. Nejdříve formulujeme PL prvního řádu.

PL 1

ZÁKLADNÍ ÚVAHA

Uvažme tři dívky, Annu, Báru a Gabrielu. Tyto tři dívky tvoří naše univerzum úvahy, univerzum U . Označme si je po řadě (metajazykovými) výrazy α, β, γ . Tedy $U = \{\alpha, \beta, \gamma\}$, **univerzum** je množina individuí. Jména zastupující tyto dívky označíme **individuovými konstantami** a, b, c (tyto konstanty budou mít vždy stejnou interpretaci - α pro a , β pro b , γ pro c). **Individuové proměnné** $x, y, z, x_1, y_2, z_2, \dots$ zastupují individua „neurčitě“ (v závislosti na valuaci). Mějme větu „Gabriela je dívka“, nahradíme-li jméno Gabriela proměnnou x , pak získáme větu „ x je dívka“ (kde x nabude hodnotu α , nebo β , či γ). **Predikátový symbol** je výraz, označující **predikát**, tedy vlastnost nebo vztah, který lze predikovat (vypovídat) o individuu, nebo individuích (např. „být dívka“ je predikát). Vlastnost „být dívka“ je predikovatelná (jednotlivě) o třech individuích, tyto tři tvoří množinu „dívek“; píšeme $P(x)$. Můžeme tvrdit, že „pro všechna x platí, že x je dívka“; v zápisu užijeme **obecný kvantifikátor** \forall ($\forall x P(x)$). Jiným příkladem je „být černovlasá“, což se týká např. jen Gabriely, tedy „pro některá x platí, že x je černovlasá“; v zápisu užijeme **existenční (částečný) kvantifikátor** \exists ($\exists x P(x)$). Obecný kvantifikátor lze v případě konečného univerza nahradit konjunkcí $P(a_1) \wedge \dots \wedge P(a_n)$, existenční kvantifikátor zase disjunkcí $P(a_1) \vee \dots \vee P(a_n)$ (kde a_1, \dots, a_n jsou individuové konstanty). **Vlastnosti** jsou tedy v PL chápány jako množiny. Predikát pro vlastnost může být predikován jen o nějakém individuu; je to monadický predikát. V našem univerzu můžeme ovšem také

konstatovat např. vztah, že Gabriela je vyšší než Anna; zapisujeme jej $P(x,y)$ (je-li Gabriela vyšší než Bára, i vyšší než Anna, můžeme psát $P(c,x)$, kde c je konstanta pro γ). **Vztahy** jsou chápány v PL jako n -ární relace. Predikáty, které platí o nějakých dvojicích se nazývají binární predikáty (o trojicích ternární, atd.), **arita** (četnost) predikátu je počet míst predikátu. Co je to relace? Nejprve uvažme **kartézský součin** univerza - je-li $U=\{\alpha, \beta, \gamma\}$ máme při U^2 množinu $\{\langle\alpha,\alpha\rangle, \langle\alpha,\beta\rangle, \langle\alpha,\gamma\rangle, \langle\beta,\alpha\rangle, \langle\beta,\beta\rangle, \langle\beta,\gamma\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle, \langle\gamma,\gamma\rangle\}$, tj. množinu 3^2 uspořádaných dvojic (kde 3 je počet prvků U , 2 je násobnost součinu); obecně je možný kartézský součin U^k . **Relace** je podmnožinou kartézského součinu daného U ; při U^2 je možných podmnožin 2^9 (kde 9 je počet n -tic U^2). Např. relace „být vyšší než“, platí (je-li Bára vyšší než Anna, Gabriela vyšší než Anna, Gabriela vyšší než Bára) jen o podmnožině daného kartézského součinu, totiž $\{\langle\beta,\alpha\rangle, \langle\gamma,\alpha\rangle, \langle\gamma,\beta\rangle\}$; lze říci, že predikátový symbol je interpretován touto podmnožinou. Výpověď je pravdivá nebo nepravdivá podle toho, zda ten prvek patří do té množiny nebo ne.

JAZYK PREDIKÁTOVÉ LOGIKY 1. ŘÁDU

Abeceda:

- i) symboly pro individuové proměnné $x, y, z, \dots, x_1, y_1, z_1, \dots$
- ii) symboly pro individuové konstanty a_1, \dots, a_n
- iii) symboly pro predikáty (i značí aritu predikátu; $i \geq 1$) $P^i, Q^i, R^i, \dots, P^i_1, P^i_2, \dots$
- iv) symboly pro logické spojky $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow, \dots$
- v) symboly pro kvantifikátor částečný a obecný \exists, \forall
- vi) pomocné symboly $(,), ,$

Pozn. PL1 může být rozšířena o funkcionální symboly (f_1^i, f_2^i, \dots) a o identitu ($=$).

Gramatika:

- termy

- i) každá proměnná je term
- ii) každá individuová konstanta je term

- správně utvořené formule

1) atomické formule

1) jestliže P^k je k -místný predikátový symbol a jestliže d_1, \dots, d_k jsou termy, pak $P^k(d_1, \dots, d_k)$ je atomická formule (s.u.f.)

2) formule

1) jestliže A, B jsou s.u.f., pak $\neg A, (A \circ B)$ (kde \circ je \wedge nebo \vee , či \rightarrow , či \leftrightarrow) jsou s.u.f.

1) jestliže x je proměnná a A je s.u.f., pak $\exists x A$ a $\forall x A$ jsou s.u.f.

3) nic jiného není s.u.f.

Pozn.: Budeme psát $\forall x_1 \dots x_n A$ místo $\forall x_1, \forall x_2, \dots, \forall x_n A$, stejně tak pro \exists .

SÉMANTIKA PL1

Valuace

Individua lze uspořádat do nekonečně mnoha nekonečných sekvencí. V těchto sekvencích rozpoznáváme pozice. Valuace je pak funkce, která každé proměnné přiřadí přesně jedno individuum, a to - pro proměnnou x_i - právě to individuum, které je na i -té pozici ($v(x_i) = \xi$). Např. pro $U = \{\alpha, \beta\}$ máme sekvence $\alpha\alpha\alpha\alpha\dots, \beta\alpha\alpha\alpha\dots, \alpha\beta\alpha\alpha\dots, \alpha\alpha\beta\alpha\dots, \dots, \beta\beta\alpha\alpha\dots, \beta\alpha\beta\alpha\dots, \dots$, přičemž v_1 přiřazuje $x_1 \alpha, x_2$ také α , stejně tak i x_3, x_4, \dots, v_2 přiřazuje $x_1 \beta, x_2$ i x_3 i $x_4 \alpha$, atd.

Sémantická funkce S je funkce, která predikátovým k -argumentovým symbolům přiřadí podmnožiny univerza U (při $k=1$), či množiny uspořádaných n -tic individuí z U (při $k>1$), individuovým konstantám prvky U .

Interpretace je funkce $\mathfrak{I}_{S,v}$, které přiřazuje každé atomické formuli A určitou pravdivostní hodnotu v závislosti na valuaci v a sémantické funkci S takto:

- termy (přiřazuje jen individuum jako valuace)

a) je-li A proměnná x_i , pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = v(x_i)$

b) je-li A individuální konstanta a_i , pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = S(a_i)$

-

a) je-li A predikátový symbol P^k , pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = S(P^k)$

- atomické formule

a) je-li A atomická formule $P^k(d_1, \dots, d_k)$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 1$, jestliže n -tice $\langle \mathfrak{I}_{S,v}(d_1), \dots, \mathfrak{I}_{S,v}(d_k) \rangle \in S(P^k)$; 0 v opačném případě

- formule

a)

1. je-li A tvaru $\neg B$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v}(B) = 0$; 0 v opačném případě
2. je-li A tvaru $B \wedge C$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v}(B) = \mathfrak{I}_{S,v}(C) = 1$; 0 v opačném případě
3. je-li A tvaru $B \vee C$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 0$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v}(B) = \mathfrak{I}_{S,v}(C) = 0$; 1 v opačném případě
4. je-li A tvaru $B \rightarrow C$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 0$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v}(B) = 1$ a $\mathfrak{I}_{S,v}(C) = 0$; 1 v opačném případě
5. je-li A tvaru $B \leftrightarrow C$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v}(B) = \mathfrak{I}_{S,v}(C)$; 0 v opačném případě

b)

1. je-li A tvaru $\forall xB$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v'}(B) = 1$ při každé valuaci v' , která přiřazuje volné proměnné stejnou hodnotu jako v , avšak vázané proměnné přiřadí jakoukoli hodnotu z U ; 0 v opačném případě
2. je-li A tvaru $\exists xB$, pak $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = 1$, jestliže $\mathfrak{I}_{S,v'}(B) = 1$ alespoň při jedné valuaci v' ; 0 v opačném případě

Komentář k interpretaci

- termy

a) Interpretace individuové proměnné je totéž co valuace pro tuto proměnnou (je to nějaký prvek univerza ($\xi \in U$), v závislosti na valuaci).

b) Interpretace individuové konstanty je prvek univerza ($\xi \in U$) (interpretace nejsou ovlivněny valuacemi).

-

a) V případě predikátového symbolu P^k , je jednotlivou interpretací přiřazena (v závislosti na v) – je-li $k=1$ – podmnožina univerza, resp. – je-li $k>1$ – množina uspořádaných n -tic.

- atomické formule

a) Interpretace atomické formule $P^k(d_1, \dots, d_k)$ je 1, jestliže n -tice prvků (daná interpretací termů je prvkem interpretace daného predikátu $P^k (\langle \mathfrak{I}_{S,v}(d_1), \dots, \mathfrak{I}_{S,v}(d_k) \rangle \in S(P^k))$).

- formule

a) Interpretace výrokově logických formulí v prostředí PL je snadno nahlédnutelná. Umožňuje nám to ústojně včlenit VL do PL.

b) Valuace v' , je taková valuace, která je zcela podobná valuaci v , až na přisouzení různých hodnot vázané proměnné x . Jinými slovy řečeno - daná valuace v je akceptována jen pro proměnné (případně vyskytující se v B), které jsou odlišné od x . Je to omezení valuace v tak, že se netýká x .

Pravdivost

Věta A nabývá v interpretaci $\mathfrak{I}_{S,v}$ hodnoty **pravda nebo nepravda** při valuaci v . (Věta A je splňována valuací v v interpretaci \mathfrak{I} , jestliže $\mathfrak{I}_{S,v}(A) = \text{pravda}$.)

Věta A je **pravdivá** v interpretaci $\mathfrak{I}_{S,v}$, jestliže nabývá hodnoty pravda při **každé valuaci** v .

Věta A je **logicky pravdivá** (tautologie), jestliže je pravdivá při **každé interpretaci**.

Vyplývání

Věta B logicky vyplývá z vět A_1, \dots, A_n , jestliže je pravdivá při každé interpretaci, při níž jsou pravdivé věty A_1, \dots, A_n .

Volnost a vázanost proměnných

i) výskyt x v x je volný

ii) výskyt x je volný v $\neg A, A \circ B$, je-li volný v A , resp. i v B

iii) výskyt x je volný v $\forall y A, \exists y A$, je-li volný v A a jde-li o proměnnou odlišnou od y

Tedy: proměnná je volná v A , jestliže má v A alespoň jeden výskyt volný, a naopak: proměnná je vázaná v A , jestliže jsou všechny její výskyty v A vázány kvantifikátorem.

Uzavřená formule je formule, v níž jsou všechny proměnné vázány.

Term t je substituovatelný za proměnnou x ve formuli A , je-li term individuová konstanta nebo individuová proměnná x taková, že po dosazení do formule A není v dosahu kvantifikátoru, který váže proměnnou x . Formulí, v níž je každý volný výskyt x nahrazen termínem t , zapisujeme $A[x/t]$.

Tautologie predikátové logiky

Z jakékoli tautologie výrokové logiky lze získat substitucí jakékoli formule PL za výrokové symboly tautologii PL. Např. v případě $p \vee \neg p$ můžeme za p dosadit např. $\forall xP(x)$: $\forall xP(x) \vee \neg \forall xP(x)$, anebo jen $P(x)$: $P(x) \vee \neg P(x)$.

Specifické tautologie PL jsou pak např.:

A)

$$\begin{aligned} \neg \forall x A &\leftrightarrow \exists x \neg A && \text{De Morganovy zákony pro kvantifikátory} \\ \forall x \neg A &\leftrightarrow \neg \exists x A \\ \forall x A &\leftrightarrow \neg \exists x \neg A \\ \neg \forall x \neg A &\leftrightarrow \exists x A \end{aligned}$$

B) (kde t musí být substituovatelné za x)

$$\begin{aligned} \forall x A &\rightarrow A[x/t] && \text{zákon konkretizace} \\ A[x/t] &\rightarrow \exists x A && \text{zákon abstrakce} \\ \forall x A &\rightarrow \exists x A && \text{zákon partikularizace} \end{aligned}$$

C)

$$\begin{aligned} \forall x(A \wedge B) &\leftrightarrow (\forall x A \wedge \forall x B) && \text{zákon distributivnosti kvantifikátorů} \\ \exists x(A \vee B) &\leftrightarrow (\exists x A \vee \exists x B) \\ (\forall x A \vee \forall x B) &\rightarrow \forall x(A \vee B) \\ (\exists x A \wedge \exists x B) &\rightarrow \exists x(A \wedge B) \end{aligned}$$

D)

$$\exists x \forall y P(x, y) \rightarrow \forall y \exists x P(x, y)$$

$$\exists y \forall x P(x,y) \rightarrow \forall x \exists y P(x,y)$$

AXIOMATIZACE PREDIKÁTOVÉ LOGIKY PRVNÍHO ŘÁDU

1) Formální jazyk (viz výše)

2) Axiomy

a) (axiom-schémata)

$$\text{Ax.1: } A \rightarrow (B \rightarrow A)$$

$$\text{Ax.2: } (A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$$

$$\text{Ax.3: } (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$$

b)

$$\text{Ax.4: } \forall x A \rightarrow A[x/t]$$

$$\text{Ax.5: } \forall x (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x B) \text{ (kde } A \text{ neobsahuje volnou proměnnou } x)$$

3) Pravidla odvození

Modus ponens (MP) (pravidlo odloučení)

Jsou-li A i $A \rightarrow B$ teorémy, pak je i B teorémem.

$$\frac{A, A \rightarrow B}{B}$$

Pravidlo generalizace (PG)

Nechť B neobsahuje žádnou volnou proměnnou x . Jestliže můžeme dokázat větu $B \rightarrow A[x]$, pak můžeme dokázat i větu $B \rightarrow \forall x A[x]$. Při kvantifikaci se z volné proměnné (jakou je x v první formuli) stává proměnná vázaná. Tímto pravidlem zajišťujeme bezespornost (věta $B \rightarrow A[x]$ by měla být logicky pravdivá, tj. pravdivá pro všechna udělení hodnot proměnné x), nikoli ale pravdivost (když je $B \rightarrow A[x]$ při nějakém udělení hodnot pravdivá, není nutné, že i $B \rightarrow \forall x A[x]$ je pravdivá).

$B \rightarrow A[x]$

$B \rightarrow \forall x A[x]$

DALŠÍ POJMY

Pojmy, které jsme si definovali ve výrokové logice zůstávají v platnosti, modifikovat je třeba jen definici důkazu z hypotéz.

Důkaz z hypotéz

Důkaz z hypotéz je konečná posloupnost správně utvořených formulí (vedle axiomů a vět odvozených odvozovacími pravidly tu mohou být i jednotlivé hypotézy). Podmínkou je, že je-li mezi kroky důkazu je $H=A_i$, která obsahuje proměnnou x , pak někde dále v důkazu bude krok vzniklý uplatněním pravidla generalizace (což povede ke kvantifikaci proměnné x ; píšeme pak $A_i \models_{xi} B$).

PL1 je úplná, bezesporná, ale není rozhodnutelná.

ARISTOTELSKÁ LOGIKA

Aristotelská a posléze tradiční logika pracovala jen s jednomístnými predikáty, je jen částí PL1. Věty byly analyzovány jako určitá spojení subjektu a predikátu (budeme je označovat po řadě A a B). Kvalita (kladný/záporný výrok) a kvantita (obecný/částečný výrok) vytváří čtyři možnosti typů výroků, přičemž tyto možnosti byly ve středověku označovány a, e, i, o (z latinských slov **affirmo** - tvrdím, **negō** -popírám). Tedy: Každé A je B. [a], Žádné A není B. [e], Některá A jsou B. [i], Některá A nejsou B. [o].

Srovnání vyjádření v tradiční logice, predikátové logice; v posledním sloupci tzv. Russellovy přechody (univerzum je v nich omezeno):

tradiční logika predikátová logika

(Russellovy přechody)

AaB	$\forall x (A(x) \rightarrow B(x))$		$(\forall x \in A) B(x)$
AiB	$\exists x (A(x) \wedge B(x))$		$(\exists x \in A) B(x)$
AeB	$\forall x (A(x) \rightarrow \neg B(x))$	nebo $\neg \exists x (A(x) \wedge B(x))$	$(\forall x \in A) \neg B(x)$
AoB	$\exists x (A(x) \wedge \neg B(x))$	nebo $\neg \forall x (A(x) \rightarrow B(x))$	$(\exists x \in A) \neg B(x)$

Obraty

obrat prostý (kvantita je zachována):

$$SiP \leftrightarrow PiS$$

$$SeP \leftrightarrow PeS$$

obrat po případě (kvantita je oslabena):

$$SaP \leftrightarrow PiS$$

$$SeP \leftrightarrow PoS$$

Kategorický sylogismus

Aristotelův kategorický (tedy bezpodmínečný) sylogismus je úsudek, který má dvě premisy (vyšší a nižší), jeden závěr. Premisy a závěr jsou složeny ze tří termínů: subjektu S, predikátu P a středního (mediálního) členu M. Premisy a závěr jsou vždy o dvou termínech (tedy subjekt a predikát). Celkem jsou možné čtyři figury (poslední je středověká), přičemž pro každou je 64 možných distribucí a, i, e, o mezi termíny premis a závěru. Celkem je tedy 256 modů (typů úsudků), z nichž Aristoteles vybral jen ty, kde závěr vyplývá z premis.

(Pozn. Stoiky zpracovaný hypotetický sylogismus je struktury $A \rightarrow B, B \rightarrow C / A \rightarrow C$, hypoteticko-kategorický $A, A \rightarrow B / B$.)

M P	PM	M P	PM
<u>S M</u>	<u>S M</u>	<u>M S</u>	<u>M S</u>
S P	S P	S P	S P

(např. v první figurě jsou platné čtyři mody: *barbara, celarent, darii, ferio*)

Ověřování úsudků Vennovými diagramy

Vennovy diagramy jsou v podstatě množinovým vyjádřením úsudků. Každý ze tří termínů je zastoupen jedním z kruhů. Jednotlivé premisy (založené na nějakém poměru dvou množin) pak vyznačíme následovně: vyšrafujeme vždy tu část kruhu, tj. jednu ze sedmi (resp. osmi) podmnožin, kde se nenachází individua mající vlastnosti zmíněné v obou termínech (volíme např. šrafování zleva doprava, zprava doleva), nevyšrafovanu tedy necháváme tu část, o níž nic bližšího nevíme; v případě, že se tvrdí, že v nějaké podmnožině je alespoň jeden prvek, pak do ní vyznačíme křížek, resp. křížky. Úsudek je korektní, pokud to, co dostaneme vymodelováním premis, se shoduje s tím, co vymodelujeme ze závěru.

Příklad nekorektního úsudku:

Žádný můj známý (Z) není logik (L). ($\backslash\backslash$)

Žádný logik (L) není Indián (I). ($///$)

Žádný můj známý (Z) není Indián (I).

ROZŠÍŘENÍ PL1 O IDENTITU

Identita je relace (ne mezi symboly, ale mezi denotáty), která je reflexivní: $\forall x R(x,x)$, symetrická: $\forall xy ((x=y) \rightarrow (y=x))$ a tranzitivní: $\forall xyz ((x=y) \rightarrow ((y=z) \rightarrow (x=z)))$. Je třeba rozšířit jazyk, interpretaci a přidat axiom i pravidlo.

Rozšíření abecedy: symbol rovnosti (=)

Rozšíření gramatiky: $d_1=d_2$ je s.u.f.

Interpretace: $\mathfrak{I}_{S,v}(d_1=d_2) = 1$ právě tehdy, když $\mathfrak{I}_{S,v}(d_1) = \mathfrak{I}_{S,v}(d_2)$ (přiřadíme-li tedy stejné individuum)

Axiom pro identitu:

Ax.6: $\forall x (x=x)$

Schéma pravidla pro identitu:

Ax.7: $\forall xy ((x=y) \rightarrow (A[x] \leftrightarrow A[y/x]))$

ROZŠÍŘENÍ PL1 O FUNKČNÍ TERMÝ

Pro některé aplikace PL je třeba přidat speciální termý pro funkce. Opět je třeba rozšířit jazyk i axiomy PL1.

Rozšíření abecedy: Je-li P_i^n n -členný predikátový symbol, pak f_i^{n-1} je příslušný $n-1$ -členný funkční symbol.

Rozšíření gramatiky: Jsou-li $t_1 \dots t_k$ termý, pak $f_i^k(t_1 \dots t_k)$ je term.

Axiomy pro funkční termý:

Ax.8: $\forall x_1 \dots x_{n-1} \exists! y P_i^n(x_1 \dots x_{n-1} y)$ (kde $\exists! y$ znamená přesně jedno y)

Ax.9: $\forall x_1 \dots x_n y P_i^{n-1}(x_1 \dots x_n f_i(x_1 \dots x_n))$

RELACE

(v našem zápisu neužíváme infixové notace xRy)

Doplňk relace	$R'(x,y) =_{df} \neg R(x,y)$
Inkluze relací	$R \subseteq S =_{df} \forall xy (R(x,y) \rightarrow S(x,y))$
Rovnost relací	$R=S =_{df} \forall xy (R(x,y) \leftrightarrow S(x,y))$
Sjednocení relací	$R \cup S(x,y) =_{df} R(x,y) \vee S(x,y)$
Průnik relací	$R \cap S(x,y) =_{df} R(x,y) \wedge S(x,y)$
Univerzální relace	$U(x,y) =_{df} R(x,y) \vee \neg R(x,y)$
Prázdná relace	$\emptyset(x,y) =_{df} R(x,y) \wedge \neg R(x,y)$
Inverzní relace	$R^{-1}(x,y) =_{df} R(y,x)$
Kompozice relací	$RoS(x,y) =_{df} \exists z R(x,z) \wedge S(z,y)$

PL2

V PL2 jsou na rozdíl od PL1 povoleny i predikátové proměnné, které nabývají jako hodnoty množiny (tj. podmnožiny univerza), a navíc tyto predikátové proměnné mohou být

kvantifikovány. PL2 je bezsporná, není ale úplná. Příkladem výrazu PL2 je např. zápis Leibnizovy identity nerozlišitelných entit: $(x=y) \leftrightarrow \forall P(P(x) \leftrightarrow P(y))$, tedy že x a y jsou identické právě tehdy, když mají všechny vlastnosti stejné. Předmětem PL2 jsou zejména vlastnosti binárních relací.

Vlastnosti binárních relací

Reflexivita	$\text{Refl}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall x \mathbf{R}(x,x)$
Poloreflexivita	$\text{Polorefl}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \exists x \neg \mathbf{R}(x,x) \wedge \exists x \mathbf{R}(x,x)$
Antireflexivita	$\text{Antirefl}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \neg \forall x \mathbf{R}(x,x)$
Ireflexivita	$\text{Irefl}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall x \neg \mathbf{R}(x,x)$
Symetrie	$\text{Sym}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall xy (\mathbf{R}(x,y) \rightarrow \mathbf{R}(y,x))$
Polosymetrie	$\text{Polosym}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \exists xy ((\mathbf{R}(x,y) \wedge \neg \mathbf{R}(y,x)) \wedge (\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,x)))$
Asymetrie	$\text{Asym}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall xy (\mathbf{R}(x,y) \rightarrow \neg \mathbf{R}(y,x))$
Antisymetrie	$\text{Antisym}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall xy ((\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,x)) \rightarrow (x=y))$
Tranzitivita	$\text{Trans}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall xyz ((\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,z)) \rightarrow \mathbf{R}(x,z))$
Polotranzitivita	$\text{Polotrans}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \exists xyz ((\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,z) \wedge \mathbf{R}(x,z)) \wedge \mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,z) \wedge \neg \mathbf{R}(x,z))$
Intranzitivita	$\text{Intrans}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall xyz ((\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,z)) \rightarrow \neg \mathbf{R}(x,z))$
Konexnost	$\text{Con}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \forall xy ((x \neq y) \rightarrow (\mathbf{R}(x,y) \wedge \mathbf{R}(y,x)))$
Inkonexnost	$\text{Incon}(\mathbf{R}) =_{\text{df}} \exists xy ((x \neq y) \wedge \neg \mathbf{R}(x,y) \wedge \neg \mathbf{R}(y,x))$

Speciální relace

Relace typu ekvivalence: $\text{Refl}(\mathbf{R}) \wedge \text{Sym}(\mathbf{R}) \wedge \text{Trans}(\mathbf{R})$

Ostré uspořádání: $\text{Refl}(\mathbf{R}) \wedge \text{Asym}(\mathbf{R}) \wedge \text{Trans}(\mathbf{R})$

Částečné uspořádání: $\text{Refl}(\mathbf{R}) \wedge \text{Antisym}(\mathbf{R}) \wedge \text{Trans}(\mathbf{R})$

Jiří Raclavský 1/10/1999/IV