VÝROKOVÁ LOGIKA

[Jiří Raclavský]

Výroková logika (VL) je teorií výrokově logických spojek chápaných jako jména pravdivostních funkcí. Zkoumány jsou výroky složené z dílčích výroků (ty jsou označovány výrokovými proměnnými). Je uplatňován Frege-Churchův princip skladebnosti - pravdivostní hodnota složeného výrazu je jednoznačně určena pravdivostními hodnotami jeho složek.

PRAVDIVOSTNÍ FUNKCE

Každá *n*-ární spojka je funkcí definovanou na *n*-tici pravdivostních hodnot, kterým přiřazuje určitou pravdivostní hodnotu. Počet těchto *n*-árních pravdivostních funkcí je 2^n-tá mocnina dvou. (V následujících tabulkách označujeme pravdivostní hodnou pravda jako 1, nepravda jako 0.)

Nulární funkce

f_1^0	f_2^0
1	0

Jednoargumentové funkce

argument	f_1^1	f_2^1 (Id)	f_3^1 ($\neg$)	f_4^1
1	1	1	0	0
0	1	0	1	0

(Pozn. Id znamená identitu (identickou funkci).)

Dvouargumentové funkce

argu-ment	f_1^2	f_2^2	f_3^2	f_4^2	f_5^2	f_6^2	f_7^2	f_8^2	f_9^2	f_{10}^2	f_{11}^2	f_{12}^2	f_{13}^2	f_{14}^2	f_{15}^2	f_{16}^2
		$\vee$			$\rightarrow$		$\leftrightarrow$	$\wedge$	/						$\vert$	
<1 , 1>	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
<1 , 0>	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
<0 , 1>	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
<0 , 0>	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

(Pozn. / je Shefferova funkce - "... je neslučitelné s ...", | je Nicodova (Peirceova) funkce - "ani..., ani..."; f_{10}^2je vylučovací disjunkce.)

Nejznámější výrokové spojky

negace (ne)	konjunkce (a)	disjunkce (nebo)	implikace (jestliže,pak)	ekvivalence (právě tehdy, když)
$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
0 1	1 **1** 1	1 **1** 1	1 **1** 1	1 **1** 1
1 0	1 **0** 0	1 **1** 0	1 **0** 0	1 **0** 0
	0 **0** 1	0 **1** 1	0 **1** 1	0 **0** 1
	0 **0** 0	0 **0** 0	0 **1** 0	0 **1** 0

Příklady:

"Neprší." ($\neg$), "Není pravda, že je horko." ($\neg$)
"Prší a je mlha." ($\wedge$), "Petr a Pavel mají auto." ($\wedge$)
"Prší nebo je mlha." ($\vee$)
"Jestliže svítí slunce, pak je hezky." ($\rightarrow$), "Je-li 1+1=2, pak v Praze prší." ($\rightarrow$)
"Prší tehdy a jen tehdy, když padá voda." ($\leftrightarrow$)

JAZYK (SYNTAX) VÝROKOVÉ LOGIKY

Abeceda:

i) výrokové symboly p, q, r, ... p_1, q_1, r_1, ...
ii) symboly pro výrokové spojky $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$
iii) pomocné symboly (,) a ,

Gramatika:

i) výrokové symboly (p, q, r, ...) jsou správně utvořené formule (s.u.f.)
ii) jestliže A, B jsou s.u.f., pak $\neg$A, (A$\wedge$B), (A$\vee$B), (A$\rightarrow$B), (A$\leftrightarrow$B) jsou s.u.f.
ii) nic jiného není s.u.f.

Pozn.1: Bod gramatiky ii) se může v různých systémech VL lišit. Např. stačí uvést $\neg$ a $\vee$, nebo jen / či jen |; ostatní výrokové spojky (pravdivostní funkce) lze pak odvodit.
Pozn.2: Symboly A a B jsou výrazy metajazyka, jenž mohou označovat jakékoli, tedy i složené výroky.
Pozn. 3: Budeme užívat konvenci o vynechávání závorek všude tam, kde to nebude na újmě jednoznačnosti zápisu dané formule.

SÉMANTIKA VÝROKOVÉ LOGIKY

Interpretace - pravdivostní ohodnocení (valuace) je zobrazení $\Im$, které přiřazuje každé atomické formuli (výrokové proměnné) dané úvahy určitou pravdivostní hodnotu.

Formule A nabývá při interpretaci $\Im$ pravdivostní hodnotu pravda, platí-li:
1. A je výrokový symbol a $\Im_{(A)}$= 1.
2. A je tvaru $\neg$B a $\Im_{(B)}$=0.
3. A je tvaru B$\wedge$C a $\Im_{(B)}$= $\Im_{(C)}$ = 1.
4. A je tvaru B$\vee$C a $\Im_{(B)}$= 1 nebo $\Im_{(C)}$= 1.
5. A je tvaru B$\rightarrow$C a $\Im_{(B)}$= 0 nebo $\Im_{(C)}$= 1.
6. A je tvaru B$\leftrightarrow$C a $\Im_{(B)}$=$\Im_{(C)}$.

Splnitelnost definovaná na základě pojmu interpretace

Interpretace $\Im$ splňuje formuli A, platí-li:
1. A je výrokový symbol a $\Im_{(A)}$= 1.
2. A je tvaru $\neg$B a $\Im$ nesplňuje B.
3. A je tvaru B$\wedge$C a $\Im$ splňuje B i C.

4. A je tvaru B∨C a $\Im$ splňuje B nebo C.
5. A je tvaru B→C a $\Im$ nesplňuje B nebo splňuje C.
6. A je tvaru B↔C a $\Im$ splňuje B i C nebo nesplňuje B i C.

Formule je **splnitelná**, je-li splňována aspoň jednou interpretací, kterou pak nazýváme **model** této formule.

Tautologie je formule (věta), která nabývá hodnoty pravda při každé interpretaci (tedy formule, která je každou interpretací splňována).

Kontradikce je formule (věta), která nabývá hodnoty nepravda při každé interpretaci (tedy formule, která není žádnou interpretací splňována).

Seznam některých tautologií

A)

$\neg(p \wedge \neg p)$	zákon sporu
$(p \vee \neg p)$	zákon vyloučeného třetího
$p \rightarrow p$	zákon totožnosti
$p \leftrightarrow \neg\neg p$	zákon dvojí negace
$p \leftrightarrow (p \vee p)$	zákon idempotence
$p \leftrightarrow (p \wedge p)$	zákon idempotence

B)

$(p\wedge\neg p) \rightarrow q$	zákon Dunse Scota
$p \rightarrow (q\rightarrow p)$	zákon simplifikace
$(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \leftrightarrow ((p\wedge q)\rightarrow r)$	zákon slučování premis
$(p\rightarrow\neg p) \rightarrow \neg p$	zákon redukce ad absurdum

C)

$\neg(p\vee q) \leftrightarrow (\neg p\wedge\neg q)$	De Morganovy zákony
$\neg(p\wedge q) \leftrightarrow (\neg p\vee\neg q)$	

D)

$(p\rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q) \wedge (q\rightarrow p))$
$\neg(p\rightarrow q) \leftrightarrow (p \wedge \neg q)$	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow ((p\rightarrow q)\wedge(\neg p\rightarrow\neg q))$
$(p\rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$	
$(\mathrm{p}\rightarrow q) \leftrightarrow (\neg p \vee q)$	

E)

komutativita	$(p\wedge q) \leftrightarrow (q\wedge p)$	$(p\vee q) \leftrightarrow (q\vee p)$	$(p\leftrightarrow q) \leftrightarrow (q\leftrightarrow p)$
asociativita	$(p\wedge(q\wedge r)) \leftrightarrow (p\wedge q)\wedge r)$	$(p\vee(q\vee r)) \leftrightarrow ((p\vee q)\vee r)$	$(p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r))\leftrightarrow((p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r)$
distributivita	$((p\wedge(q\vee r))\leftrightarrow((p\wedge q)\vee(p\wedge r))$	$((p\vee(q\wedge r))\leftrightarrow((p\vee q) \wedge(p\vee r))$	
tranzitivita	$(p\rightarrow q) \rightarrow ((q\rightarrow r)\rightarrow(p\rightarrow r))$		

F) (kde T je tautologie a K je kontradikce)

$(p \wedge \mathrm{T}) \leftrightarrow p$

$(p \wedge \mathrm{K}) \leftrightarrow \mathrm{K}$

$(p \vee \mathrm{T}) \leftrightarrow \mathrm{T}$

$(p \vee \mathrm{K}) \leftrightarrow p$

Pravidlo substituce

Tautologie zůstane tautologií, i když v ní nahradíme každý výskyt určité proměnné jednou a toutéž správně utvořenou formulí.

Pravidlo ekvivalentního nahrazení

Nechť A je s.u.f., která obsahuje alespoň na jednom místě podformuli B. Jestliže platí, že B je ekvivalentní s C, a jestliže formule A' vznikne nahrazením libovolného počtu výskytů formule B formulí C ve formuli A, pak A je ekvivalentní s A'.

(Pozn. o rozdílech: Podle pravidla substituce nahrazujeme proměnné, podle pravidla ekvivalentního nahrazení nahrazujeme formule. Při užití pravidla substituce dosazujeme za každý výskyt, při užití pravidla ekvivalentního nahrazení dosazujeme za libovolný počet výskytů.)

Výrokově logické vyplývání

Věta B výrokově logicky vyplývá z vět $A_1, A_2, ..., A_n$, jestliže nabývá hodnoty pravda za všech takových uděleních hodnot proměnným, při nichž nabývají hodnoty pravda všechny věty $A_1, A_2, ..., A_n$. ($\models$, $\therefore$)

(Pozn.: Zapisujeme $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n \models B$, přičemž $(A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n \models B) \leftrightarrow \ \models (A_1 \wedge A_2 \wedge ... \wedge A_n) \rightarrow B$.)

ÚPLNÝ SYSTÉM SPOJEK VÝROKOVÉ LOGIKY

Věta o reprezentaci

Každou pravdivostní n-ární funkci f lze reprezentovat formulí výrokové logiky, která obsahuje pouze spojky $\neg$ a $\wedge$, resp. $\vee$, : $A(p_1, p_2, ..., p_n)$.

Učiňme dohodu, že výrazem konjunkce, resp. disjunkce, rozumíme formuli, která spojuje spojkou konjunkce, resp. disjunkce, n-atomických formulí.

Literály jsou atomické formule a negace atomických formulí.

Formuli A je **normální disjunktivní formou** nad atomickými formulemi $p_1, p_2, ..., p_n$, je-li A tvaru disjunkce, jejíž každý člen je konjunkcí nějakých literálů z $p_1, p_2, ... p_n$ nebo literálem.

Formuli A je **normální konjunktivní formou** nad atomickými formulemi $p_1, p_2, ..., p_n$, je-li A tvaru konjunkce, jejíž každý člen je disjunkcí nějakých literálů z $p_1, p_2, ... p_n$ nebo literálem.

Elementární konjunkcí nad $p_1, p_2, ..., p_n$ je každá konjunkce literálů z těchto formulí, v níž se každý z těchto symbolů vyskytuje jako literál právě jednou.

Elementární disjunkcí nad $p_1, p_2, ..., p_n$ je každá disjunkce literálů z těchto formulí, v níž se každý z těchto symbolů vyskytuje jako literál právě jednou.

Úplnou normální disjunktivní formou (ÚDNF) je každá disjunkce různých elementárních konjunkcí nad $p_1, p_2, \dots p_n$.

Úplnou normální konjunktivní formou (ÚDNF) je každá konjunkce různých elementárních disjunkcí nad $p_1, p_2, \dots p_n$.

Ke každé formuli A výrokové logiky, která není tautologií (kontradikcí), lze najít formuli B, která je ve tvaru ÚKNF (ÚDNF) a je ekvivalentní s A (ÚKNF tedy nelze zkonstruovat pro tautologie a ÚDNF nelze zkonstruovat pro kontradikce).

AXIOMATIZACE VÝROKOVÉ LOGIKY

1) Formální jazyk

Formální jazyk (abeceda a gramatika-s.u.f.) je relativní k danému axiomatickému systému. Např. v případě standardního axiomatického systému jsme vybrali $\neg$ a $\rightarrow$. Formální jazyk tak je částí jazyka, který jsme uvedli výše.

2) Zadání axiomů

Axiomy jsou základní vybrané pravdivé věty (tautologie) daného sytému.

Standardní axiomy VL

Ax. 1: $p\rightarrow(q\rightarrow p)$
Ax. 2: $(p\rightarrow(q\rightarrow r)) \rightarrow ((p\rightarrow q)\rightarrow(p\rightarrow r))$
Ax. 3: $(\neg q\rightarrow\neg p) \rightarrow (p\rightarrow q)$

3) Zadání odvozovacích pravidel

Modus ponens (pravidlo odloučení)

Tvrdíme-li A i A→B, pak můžeme tvrdit i B.

$$\frac{A,\ A\rightarrow B}{B}$$

Pravidlo substituce

Tvrdíme-li nějakou větu, pak můžeme tvrdit i větu, která vznikne z původní věty tím, že všechny určité proměnné *a* nahradíme nějakou správně utvořenou formulí.

$$\frac{A}{A[B/a]}$$
(pomocí [B/*a*] vyznačujeme nahrazení proměnné *a* formulí B)

Axiom-schémata

Ax.1: $A\rightarrow(B\rightarrow A)$
Ax.2: $(A\rightarrow(B\rightarrow C)) \rightarrow ((A\rightarrow B)\rightarrow(A\rightarrow C))$
Ax.3: $(\neg B\rightarrow\neg A) \rightarrow (A\rightarrow B)$

(Axiom-schémata nám na rozdíl od axiomů generují nekonečně mnoho vět daného axiomatického systému, proto v takovémto systému nepotřebujeme pravidlo substituce.)

DALŠÍ POJMY

Důkaz

Důkaz je v daném systému konečná posloupnost správně utvořených formulí (kroků důkazu), z nichž každá je buď axiómem nebo byla odvozena aplikací některého pravidla odvození na některé předcházející správně utvořené formule.

Dokazatelnost

Určitá formule je dokazatelná v daném systému tehdy a jen tehdy, když v tomto systému existuje důkaz, jehož je tato formule členem. ($\vdash$)

Teorém je v systému S formule, která je dokazatelná v systému S.

Důkaz z hypotéz

Důkaz je v daném systému konečná posloupnost správně utvořených formulí, přičemž formule A_i je v daném systému dokazatelná z množiny hypotéz H (tj. formulí, které nejsou tautologiemi), jestliže pro každé i platí buď 1.) A_i je jednou z hypotéz, nebo 2.) A_i je axiómem, nebo 3.) vzniklo jako závěr odvozovacího pravidla MP, jehož předpoklady leží mezi A_1, ...,A_{i-1}. Řekneme, že formule A_i je dokazatelná z předpokladů H ($H \vdash A_i$).

Věta o dedukci (metateorém dedukce)

Je-li věta B dokazatelná z vět A_1, A_2,..., A_n, pak věta $A_n \rightarrow B$ je dokazatelná z vět A_1, A_2, ..., A_{n-1} (tedy je-li $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n \vdash B$, pak $A_1, A_2, ..., A_{n-1} \vdash A_n \rightarrow B$).

Sémantický výklad pravidla **modus ponens**

Jestliže formule A a formule $A \rightarrow B$ jsou tautologie, pak i B je tautologií. (Modus ponens je tedy pravidlo, které zachovává i pravdivost.)

Sémantická varianta **věty o dedukci**

B vyplývá z A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n (tedy $A_1, A_2, ..., A_{n-1}, A_n \models B$), právě když $A_1, A_2, ..., A_{n-1} \models A_n \rightarrow B$.

Rozhodnutelnost

Množina A je rozhodnutelná ve své nadmnožině B tehdy a jen tehdy, když existuje efektivní procedura (procedura o konečném počtu kroků) aplikovatelná na prvky množiny B taková, že umožní rozhodnout o každém prvku množiny B zda je, či není, prvkem množiny A.

Abeceda musí být rozhodnutelná v množině všech možných symbolů.

Množina správně utvořených formulí musí být rozhodnutelná v množině všech možných kombinací znaků abecedy.

Množina axiomů musí být rozhodnutelná v množině správně utvořených formulí.

Daný systém je rozhodnutelný tehdy a jen tehdy, když množina jeho teorémů je rozhodnutelná v množině všech správně utvořených formulí.

Bezespornost (=**konzistence**)

Daný systém je **syntakticky bezesporný**, platí-li, že v něm není dokazatelná věta $A \wedge \neg A$ (spor).

Daný systém je **sémanticky bezesporný**, platí-li pro každou větu A, že je-li tato věta dokazatelná, pak je taky logicky pravdivá (je tautologií). (Je-li $\vdash A$, pak $\models A$.)

Úplnost

Daný systém je **syntakticky úplný**, platí-li, že přidáme-li k množině axiomů správně utvořenou formuli (větu), která není teorémem, pak dostaneme sporný systém.

Daný systém je **sémanticky úplný**, platí-li pro každou větu A, že je-li tato věta tautologií, pak je v daném systému dokazatelná (je teorémem). (Je-li $\models A$, pak $\vdash A$.)

(Pozn.: Když je každý teorém tautologií, jde o (sémantickou) bezespornost, když je každá tautologie teorémem, jde o (sémantickou) úplnost. Když je systém jak bezesporný, tak i úplný, tak množina teorémů je totožná s množinou tautologií.)

Systém výrokové logiky je rozhodnutelný, bezesporný i úplný.

ZÁVĚREM

Při aplikaci výrokové logiky na přirozený jazyk narazíme (při všech výhodách jednoduchosti, rozhodnutelnosti, bezespornosti a úplnosti VL) na určitá úskalí - ne všechny případy vyplývání jsou totiž výrokovou logikou zachytitelné. Uvažme např. následující úsudky:

Premisa 1	Každý člověk je smrtelný.	Legendární český logik působí v Brně.
Premisa 2	Sokrates je člověk.	Legendární český logik je hudebník.
		Někteří hudebníci působí v Brně.
Závěr	Sokrates je smrtelný.	(pokud někdo je legendárním českým logikem)

Ačkoli závěr v nich zjevně vyplývá z premis, VL, analyzující dané výroky jako p, q, r a celý úsudek pak jako $(p \wedge q) \rightarrow r$, není s to toto vyplývání prokázat z hlediska správnosti - lze totiž nalézt takové ohodnocení výrokových proměnných (po řadě: 1, 1, 0), kterým celý úsudek nabude pravdivostní hodnoty nepravda. (VL tedy analyzuje výrazy příliš hrubozrnně.) Můžeme formulovat následující tvrzení: Jestliže věta B výrokově vyplývá z vět A_1, A_2,..., A_n, pak z nich také vyplývá. Neplatí ovšem obrácené tvrzení: Jestliže věta B vyplývá z vět A_1, A_2,..., A_n, pak z nich také výrokově logicky vyplývá.

1.10.1999, v.č.IV