

Jak plyne čas?

Nejprve si trochu zafilosofujme. Čas si můžeme představit přinejmenším třemi způsoby. Ten první by bylo možno nazvat „buddhistický“. Čas a jeho plynutí vůbec neexistuje, vše je věčná přítomnost a vnímání času je jen představa, výplod „neosvobozené mysli“ lpící na své individuální existenci. Druhý způsob lze nazvat „platónský“. Všechny časové okamžiky již existují (v nějaké říši idejí, v Boží nebo božské mysli a podobně) a naše vnímání plynutí času je opět pouze iluze „obyvatelů jeskyně“. Třetí pojetí bych nazval „existencialistické“. Čas stále vzniká (nebo je stále znovu tvořen), každý okamžik se však okamžitě propadá do minulosti.

V matematice čas neexistuje; z tohoto pohledu je matematika „buddhistická“. Fyzikální pojetí času — čas jako jeden z geometrických rozměrů časoprostorového kontinua — je v podstatě „platónské“ (jako ostatně celá fyzika s hledáním „teorie všeho“). Toto pojetí se ukazuje jako velice plodné. Vedlo k vytvoření infinitesimálního, tj. diferenciálního a integrálního, počtu v Newtonově pojetí, což je mocný nástroj k „uchopení“ pohybu a změny. (A na tom nic nemění ani skutečnost, že matematici — za všechny jmenujme alespoň Weierstrasse — infinitesimální počet zase „zmrazili“ do nehybnosti a bezčasí.) Fyzikální pochopení času vedlo k prudkému rozvoji techniky, tím ke zrychlujícímu se vzníkání nových skutečností a následně, poněkud paradoxně, k rozvoji existenciální úzkosti.

Ať již chápeme čas jakkoliv, může nás zajímat, jak lze jeho plynutí — nebo to, co za plynutí času považujeme — popsat. Je-li čas jen představou, je porozumění této představě prvním krokem k osvobození se od ní. Pokud čas již objektivně někde nebo nějak existuje, jeho myšlenkové uchopení nás k realitě přiblíží. A pokud čas teprve vzniká, dává nám porozumění jemu — nebo alespoň jeho projevům — šanci spolupodílet se na kvalitě budoucnosti.

Základní vlastností času je to, že plyne, že existuje něco, čemu se říká šipka nebo šíp času. Plynutí času se projevuje jednak tím, že můžeme rozlišit minulost a budoucnost, nebo — opatrněji řečeno — poznat, že nějaký okamžik předcházeli jinému. Pokud jsme totiž schopni dva časové okamžiky rozlišit, můžeme také poznat, který z nich byl dříve a který později. Navíc čas plyne jednosměrně, nelze se vracet v čase zpět; k minulosti se přes budoucnost nedostaneme. Dalším projevem plynutí času je to, že po každém okamžiku přijde nějaký následující, existuje jakési propojení minulosti a budoucnosti. Je ovšem možné, že běh času jednou skončí, že nastane okamžik, po kterém již žádný další nepříjde. Takový „konec času“ však může být nejvýše jeden. A třetím projevem plynutí času — nebo našeho způsobu vnímání nebo představování si času — je jakási míra času. Jsme schopni nějakým způsobem měřit nebo kvantifikovat časovou vzdálenost dvou okamžiků. Tyto tři vlastnosti času vyjádříme formálně.

Skutečnost, že jeden časový okamžik, řekněme t_1 , předchází jiný okamžik, řekněme t_2 , vyjádříme formulou $t_1 < t_2$. Větu „pokud jsme schopni dva časové okamžiky rozlišit, můžeme také poznat, který z nich byl dříve a který později“ přesněji vyjádříme výrokem „pro jakékoliv dva časové okamžiky t_1 a t_2 musí nastat právě jedna z možností: buď $t_1 < t_2$ nebo $t_2 < t_1$ a nebo $t_1 = t_2$.“ (Symbolem $t_1 = t_2$ je vyjádřena skutečnost, že okamžiky t_1 a t_2 splývají, jsou současné, nejsme je schopni od sebe rozlišit.) Jednosměrné plynutí času vyjadřuje podmínka: z toho, že jeden okamžik předchází druhému a ten předchází třetímu, plyne, že první okamžik předchází i třetímu. Formálně řečeno, z dvojice vztahů $t_1 < t_2$ a $t_2 < t_3$ vyplývá vztah $t_1 < t_3$.

Bezprostřední následování časových okamžiků za sebou vyjádříme tak, že ke každému časovému okamžiku existuje takový, který ho následuje „nejtěsněji“, tj. který ho nepředchází a který současně není předcházen žádným jiným časovým okamžikem v budoucnosti (budoucnosti vzhledem k okamžiku t). Formálněji řečeno: ke každému časovému okamžiku t existuje časový okamžik, který označíme $\sigma(t)$ a který nepředchází žádný z okamžiků s takových, že $t < s$. Ještě přesněji řečeno, ke každému okamžiku t existuje okamžik $\sigma(t)$, takový že $t \leq \sigma(t)$ a pokud $t < s$ pro nějaký okamžik s , pak $\sigma(t) \leq s$. (Přitom formule „ $t_1 \leq t_2$ “ je zkratka za „ $t_1 < t_2$ nebo $t_1 = t_2$ “.) Při „existencialistické“ interpretaci je $\sigma(t)$ časový okamžik, který „vznikl z časového okamžiku“ t nebo který „byl stvořen“ bezprostředně po okamžiku t . Povšimněme si, že nepožadujeme, aby ke každému okamžiku t existoval nějaký okamžik s takový, že $t < s$. Výrok (implikace) „pokud $t < s$ pro nějaký okamžik s , pak $\sigma(t) \leq s$ “ je pravdivá, i když žádný okamžik s , který by byl předcházen okamžikem t , neexistuje. V takovém případě by okamžik $\sigma(t)$, který existovat musí, splýval

s okamžikem t , $\sigma(t) = t$. Nepostulujeme tedy, že po každém okamžiku nastane nový „bezprostředně budoucí“ okamžik (v „existencialistické“ interpretaci) nebo že čas je aktuálně nekonečný (v „platónské“ interpretaci). Konec času tedy nastat může. Na bezprostřední následování časových okamžiků se můžeme podívat i z druhé strany. Ke každému časovému okamžiku existuje takový, který ho „nejtěsněji“ předchází. Formálně řečeno, ke každému okamžiku t existuje okamžik $\varrho(t)$, takový že $\varrho(t) \leq t$ a pokud $s < t$ pro nějaký okamžik s , pak $s \leq \varrho(t)$. Samotné symboly σ a ϱ můžeme také považovat za objekty, nazývají se operátor kroku vpřed — σ , a operátor kroku vzad — ϱ . V „platónském“ pojetí se jedná o zobrazení, které každému okamžiku přiřadí „bezprostředně následující“ nebo „bezprostředně předcházející“ okamžik; v „existencialistickém“ pojetí je σ konstruktor, který z nějakého okamžiku vytvoří okamžik „bezprostředně následující“, ϱ v nějakém okamžiku „vyvolá ze zapomnění“ okamžik „bezprostředně předcházející“.

Měření nebo kvantifikace délky časových intervalů spočívá v přiřazení nějakého reálného čísla tomuto časovému intervalu. Časový interval je jednoznačně určen okamžikem počátečním, řekněme t , a okamžikem koncovým, řekněme s , takže ono reálné číslo, vyjadřující délku časového intervalu, vlastně přiřazujeme dvojici čísel (s, t) . Povšimněme si, že samotné časové okamžiky nemusí být vyjádřeny čísly (jak je běžné ve fyzice), nemusí tedy být možné časové okamžiky sčítat nebo odčítat. (Není ostatně jasné, jak by se případně interpretoval součet dvou okamžiků.) I ve fyzikálním vyjádření, např. „čas $t = 5$ s“, nejde ve skutečnosti o nějaký okamžik pojmenovaný „pět sekund“, ale o okamžik, který je vzdálen od nějak zvoleného počátku o 5 s. Toto přiřazení míry — délky časového intervalu — dvěma okamžikům musí mít nějaké „rozumné“ vlastnosti. V případě, že počáteční okamžik t předchází koncový okamžik s , prohlásíme délku intervalu za kladnou. Pokud koncový okamžik jednoho intervalu splývá s počátečním bodem druhého intervalu, bude délka intervalu s počátečním okamžikem shodným s počátečním okamžikem prvního intervalu a s koncovým okamžikem v koncovém okamžiku druhého intervalu rovna součtu délek obou intervalů.

Stroze matematicky můžeme vlastnosti času vyjádřit následovně. Čas je nějaká množina, označme ji $\mathbb{T}$, spolu s binární relací $<$ a zobrazením $\nu : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ ($\mathbb{R}$ označuje množinu reálných čísel) takovými, že jsou splněny tři axiomy:

- A1 Relace $<$ je asymetrická, tj. z $t_1 < t_2$ plyne $\neg(t_2 < t_1)$, tranzitivní, tj. z $t_1 < t_2$ a $t_2 < t_3$ plyne $t_1 < t_3$, a úplná, tj. pro každá dvě t_1, t_2 z množiny $\mathbb{T}$ nastane právě jedna z možností $t_1 < t_2$, $t_2 < t_1$ nebo $t_1 = t_2$.
- A2 Pro každé t z množiny $\mathbb{T}$ existují $\sigma(t) = \inf\{s : t < s\}$ a $\varrho(t) = \sup\{s : s < t\}$ a $\sigma(t) \in \mathbb{T}$ a $\varrho(t) \in \mathbb{T}$.
- A3 Zobrazení ν je spojitě, silně izotonní, tj. z $t_1 < t_2$ plyne $\nu(t_2, t_1) > 0$, a má vlastnost $\nu(t_1, t_3) = \nu(t_1, t_2) + \nu(t_2, t_3)$.

Vlastnost spojitosti zobrazení nebyla v předchozím neformálním textu diskutována. Spojuje zobrazení ν s relací $<$, jedná se však o sofistikovanou matematickou záležitost. Intuitivně znamená, že pokud se okamžiky t_1 a t_2 „příliš neliší“, pak se „příliš neliší“ hodnoty $\nu(s, t_2)$ a $\nu(s, t_1)$ pro libovolný okamžik s z množiny $\mathbb{T}$. Poznamenejme, že hodnotu $\nu(t_2, t_1)$ interpretujeme jako délku časového intervalu od počátečního okamžiku t_1 do koncového okamžiku t_2 .

Uvedené axiomy postačují k tomu, aby mohla být formálně vytvořena teorie časových změn — teorie dynamických rovnic.

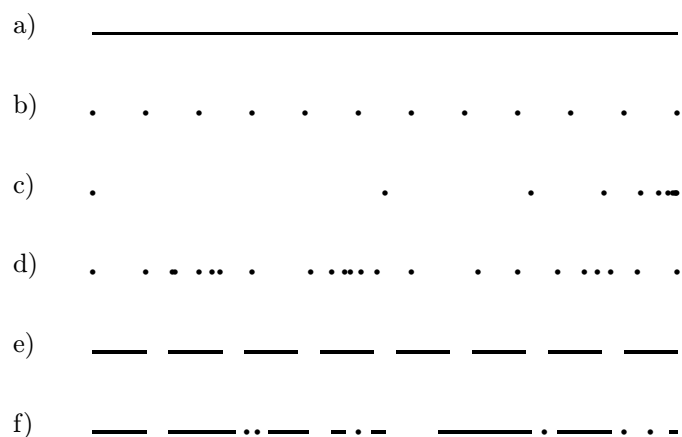
Nejprve zavedeme ještě několik pojmů. Definujme $\mu(t) = \nu(\sigma(t), t)$. Veličina μ vyjadřuje vzdálenost nějakého časového okamžiku a okamžiku bezprostředně následujícího. Čím je tato veličina menší, tím čas plyne „hladčeji“, čím je větší, tím „trhaněji“. Proto se tato veličina nazývá zrnitost času v okamžiku t . S různými „časovými skoky“, „nepravidelnostmi v plynutí času“ má určité zkušenosti téměř každý. Čas plyne, jednotlivé okamžiky nejsme téměř schopni rozlišit a najednou se něco stane — člověk se zamiluje, zemře někdo blízký, teroristé 11. září zaútočí, dojde ke kambrické explozi a podobně — a najednou nic není jako dříve; čas začneme rozlišovat na „před“ a „po“, v čase vznikla mezera. Jindy nebo pro jiné potřeby vnímáme čas přímo jako postupující v diskretních krocích, pravidelných nebo nepravidelných — čas je odměřován jednotlivými semestry,

vegetačními sezónami, parlamentními volbami, horotvornými pohyby a podobně. Zavedení zrnitosti času je současným (základní pojmy zformuloval S. Hilger roku 1988, teorie byla do uceleného tvaru dovedena roku 2001 [1]) nejúspěšnějším pokusem, jak se s časovými nepravidelnostmi vyrovnat.

Pomocí zrnitosti a operátorů skoku σ a ϱ můžeme klasifikovat časové okamžiky. Pokud $\mu(t) > 0$, tj. pokud $\sigma(t) > t$, okamžik t se nazývá *zprava osamocený*, pokud $\mu(t) = 0$, tj. pokud nejsme schopni okamžik t odlišit od okamžiku bezprostředně následujícího, $\sigma(t) = t$, pak se okamžik t nazývá *zprava hustý*. Podobně pokud $\varrho(t) < t$, nazývá se okamžik t *zleva osamocený* a pokud $\varrho(t) = t$, nazývá se okamžik t *zleva hustý*. Okamžik t se nazývá *hustý*, pokud je hustý zleva i zprava, a nazývá se *izolovaný*, pokud je osamocený zleva i zprava.

Na obrázku 1 je několik příkladů možného plynutí času. Dva extrémní případy jsou takové, že všechny časové okamžiky jsou husté, nebo že všechny okamžiky jsou izolované. Pokud jsou všechny okamžiky husté, jedná se o čas fyzikální nebo klasickou časovou osu. V takovém případě můžeme čas ztotožnit s množinou reálných čísel. Fyzikální čas je znázorněn na obrázku a). Pokud jsou všechny okamžiky izolované, může průběh času vypadat rozmanitěji. Existuje-li nějaký přirozený časový krok a zrnitost je konstantní — tj. v každém okamžiku stejná — a rovna tomuto kroku, jedná se diskretní čas s pevnou (obvykle jednotkovou) délkou kroku; je znázorněn na obr. b). Takové pojetí času se často používá při modelování dynamiky systémů. Je však adekvátní pouze tehdy, když skutečně nějaká přirozená časová jednotka existuje a modelovaný systém se vyvíjí v postupných krocích. Jiná možnost diskretního času je znázorněna na obr. c). Zrnitost času se postupně zmenšuje. V takovém případě může dokonce dojít k tomu, že existuje nějaký poslední časový okamžik, který je zleva hustý. Poslední okamžik je sice v konečné časové vzdálenosti, ale vede k němu nekonečně mnoho časových kroků. (Tato představa je jedním z možných východisek z klasické Zenonovy aporie „Achilles a želva“. Za povšimnutí stojí, že podobným způsobem si většina lidí představuje čas zbývajícím do smrti. Sice uznáme, že naše smrt přijde za nějaký konečný časový úsek — z hlediska času historického nebo dokonce geologického velice krátký — ale máme pocit, že smrt je ještě vzdálena nekonečně mnoho nějakých časových kroků; k okamžiku smrti nevidíme. Tato představa je možná správná: Moje smrt se mě netýká; pokud jsem tady, není zde smrt a pokud je zde moje smrt, nejsem tu já. Ke smrti se přibližujeme, ale v uvedeném smyslu jí nikdy nedosáhneme.) Pro modelování nějakých procesů (např. takových, na něž mají vliv nepředvídatelné přírodní katastrofy nebo společenské otřesy) může být užitečné si čas představit jako složený z izolovaných okamžiků, které ale mají nepravidelné vzdálenosti; zrnitost je sice v každém okamžiku kladná, ale v každém okamžiku jiná. Takový průběh času je znázorněn na obr. d). Další způsob plynutí času je ten, že čas po nějakou dobu plyne spojitě, všechny okamžiky jsou husté. Pak ale nastane „časový skok“, čas dospěje do nějakého zleva hustého okamžiku, za kterým bezprostředně následuje časový okamžik zleva osamocený a zprava hustý. Takto plynoucí čas si můžeme představit např. při procesu učení: během semestru se do studentovy hlavy souvisle dostávají vědomosti a pak nastane skok během prázdnin, po kterých následuje další souvislý čas přijímání vědomostí. Jiné přirozené použití takového času se souvislými úseky a skoky je při modelování zemědělských procesů — vegetační sezóna je přerušována obdobím zimy. Na obr. e) je příklad takového plynutí času. Souvislé úseky jsou znázorněny jako stejně dlouhé, tak tomu ale nemusí vždycky být. Na tomto příkladu je také možné jednoduše ilustrovat, že časové skoky nelze zaměňovat. Krok do budoucnosti a návrat může být něco úplně jiného, než krok do minulosti a návrat. Uděláme-li krok do budoucnosti a pak se vrátíme o krok do minulosti, můžeme se dostat jinam, než jsme byli. (Matematicky řečeno, operátory skoku vpřed a vzad σ a ϱ nekomutují.) Představme si, že se nacházíme v prvním zleva osamoceném a zprava hustém okamžiku, tj. na začátku — při „čtení obrázku“ zleva doprava — druhé souvislé úsečky. Skokem vpřed zůstaneme ve stejném okamžiku, „bezprostředně následující okamžik“ nemůžeme rozlišit od okamžiku, v němž se nacházíme. Potom skokem vzad se dostaneme do prvního zprava osamoceného bodu. (Tento jev nenastává, pokud všechny okamžiky jsou izolované nebo všechny okamžiky jsou husté, tedy v modelech času běžně používaných. Model času „typu e“) je tedy vhodný pro popis procesů, v nichž dochází k nevratným změnám.) Na závěr je na obr. e) znázorněna kombinace všech možností.

Úvahy o plynutí času (nebo: o popisu [naší představy o] plynutí času) jsou vlastně přípravou na popis změny. Představme si nejprve pro jednoduchost, že stav nějakého systému, o nějž se



Obrázek 1:

zajímáme, lze vyjádřit jedním reálným číslem — jednoduchá akumulace nebo něco podobného. Stav systému, v nějakém časovém okamžiku t můžeme označit symbolem $F(t)$. Systém se v průběhu času mění, v okamžiku bezprostředně následujícím po t , tedy v okamžiku $\sigma(t)$, bude ve stavu $F(\sigma(t))$, který se obecně od stavu $F(t)$ může lišit. Za vyjádření změny můžeme považovat rozdíl těchto stavů, tedy $F(\sigma(t)) - F(t)$. Tento rozdíl ale ještě není vhodnou „mírou změny“; tou by mohl být pouze v případě pravidelně plynoucího času se všemi okamžiky diskrétními a přirozenou časovou jednotkou, tedy času z obr. b) — podstatnou charakteristikou změny je totiž i zrnitost času, velikost příslušného časového kroku. Proto je za míru změny vhodné vzít změnu stavu v „bezprostředně následujících okamžicích“ relativně k délce časového kroku, tj. k zrnitosti. Za míru změny stavu můžeme tedy považovat výraz

$$F^\Delta(t) = \frac{F(\sigma(t)) - F(t)}{\mu(t)}.$$

Pokud zrnitost je konstantní a rovna „přirozené“ časové jednotce, $\mu(t) = 1$, jedná se o obvyklou diferenci (tradičně značenou $\Delta F(t)$). Je-li však okamžik t zprava hustý, $\mu(t) = 0$, pak je také $\sigma(t) = t$ a v důsledku toho $F(\sigma(t)) - F(t) = 0$. Nastává tedy problém, že výraz $F^\Delta(t)$ je „neurčitý“, je tvaru $F^\Delta(t) = 0/0$. Tento problém je však řešitelný — řešením je 300 let rozvoje infinitesimálního počtu. Mírou změny je pak derivace $F'(t)$.

Literatura

- [1] BOHNER, M. – PETERSON, A. *Dynamic Equations on Time Scales. An Introduction with Applications*. Boston–Basel–Berlin: Birkhauser, 2001. 358 p. ISBN 0-8176-4225-0.